Dürtün Gürültüye Karşı Sağlam Küme Üyeliği Süzgeç Algoritmaları
Robust Set-Membership Filtering Algorithms Against Impulsive Noise

Muhammed Ö. Sayın, N. Denizcan Vanlı, Süleyman S. Kozat
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
{sayin, vanli, kozat}@ee.bilkent.edu.tr

***Özetçe* —Bu bildiride, dürtün gürültüye karşı sağlam küme üyeliği süzgeç algoritmaları öneriyoruz. İlk olarak *küme üyeliği düzgelenmiş en küçük mutlak fark algoritmasını (SM-NLAD)* tanıtıyoruz. Bu algoritma hatanın karesi yerine mutlak değerini maliyetlendirerek dürtün gürültüye karşı sağlamlık sağlar. Sonra bu algoritmanın dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda da diğer algoritmalarla karşılaştırılabilir performans sergilemesi için logaritmik maliyet çerçevesinden yararlanarak *küme üyeliği düzgelenmiş en küçük logaritmik mutlak fark algoritmasını (SM-NLLAD)* öneriyoruz. Logaritmik maliyet fonksiyonu doğal olarak büyük hata değerlerinin mutlak değerini içerirken küçük hata değerlerinin karesini içerir. Son olarak, sayısal deneylerimizde algoritmalarımızın dürtün gürültülere karşı sağlamlığını ve dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda da karşılaştırılabilir performans sergilediğini gösteriyoruz.**

Anahtar Kelimeler*—Sağlam Uyarlanır Süzgeç, Küme Üyeliği Süzgeci, Logaritmik Hata Maliyeti, Dürtün Gürültü

***Abstract*—In this paper, we propose robust set-membership filtering algorithms against impulsive noise. Firstly, we introduce *set-membership normalized least absolute difference algorithm (SM-NLAD)*. This algorithm provides robustness against impulsive noise through pricing the absolute error instead of the square. Then, in order to achieve comparable convergence performance in the impulse-free noise environments, we propose the *set-membership normalized least logarithmic absolute difference algorithm (SM-NLLAD)* through the logarithmic cost framework. Logarithmic cost function involves the absolute value of the error for large error values and the square of the error for small error values intrinsically. Finally, in the numerical examples, we show the robustness of our algorithms against impulsive noise and their comparable performance in the impulse-free noise environments.**

Keywords*—Robust Adaptive Filtering, Set Membership Filtering, Logarithmic Error Cost, Impulsive Noise

I. GİRİŞ

Uyarlanabilir süzgeç algoritmaları hatanın bir fonksiyonunu maliyetlendirerek sıralı bir şekilde en küçük maliyete ulaşmayı hedefler. Matematiksel takibi ve uygulanması kolay olduğu için hatanın ortalama karesi yaygın olarak kullanılır. En küçük ortalama kare (LMS) ve düzgelenmiş en küçük ortalama kare (NLMS) algoritmaları bunlardan başlıcalarıdır [1]. Küme üyeliği uyarlanabilir süzgeç algoritmaları ise bunlardan farklı bir yol izler [2]. Tüm hata değerlerini yukarıdan sınırlandıran parametre vektörlerini çözüm olarak kabul eder. Bu yöntem algoritmanın daha hızlı performans sergilemesini sağlarken aynı zamanda hesap karmaşıklığını da azaltır [3].

Küme üyeliği çerçevesi içerisinde kabul edilebilir parametre vektörlerini içeren set olurluk seti olarak tanımlanır. Ancak bu setin hesaplanması kapalı bir formülle mümkün değildir. Olurluk setinin kısıt kümesi ile yaklaşıklarsak hesap karmaşıklığı az olan bir algoritma elde etmiş oluruz. [3]'te yazarlar bu algoritmayı küme üyeliği düzgelenmiş en küçük ortalama kare algoritması olarak adlandırıyor. Kısıt kümesi ise bir önceki hata değerini yukarıdan sınırlandıran parametre vektörlerini içeren kümedir. Eğer bir önceki parametre vektörümüz zaten bu küme içerisinde ise herhangi bir güncelleme yapmamıza gerek kalmadığı için hesap karmaşıklığını azaltmış oluyoruz. Aksi takdirde parametre vektörünün kısıt kümesi üzerinde iz düşümünü almak gerekir.

Dürtün gürültü düşük sıklıkta, anlık olarak oluşan, çok şiddetli gürültü sinyalidir. Bu bildiride sağlamlık, algoritmanın dürtün gürültüye karşı dayanıklılığını ifade etmektedir. Dürtün gürültü karşısında küme üyeliği algoritmaları da en küçük ortalama kare algoritmaları gibi kötü performans sergilemektedir. Küme üyeliği algoritmasının sağlamlığını artırmak için [4]'te yazarlar tüm istenilen sinyal ve bağlanım sinyali çiftlerini içeren model uzayını dört parçaya ayırır. Bu ayırma işlemiyle dürtün gürültü ile bozulan sinyaller ayıklanmak istenir ve her bir alt uzay için farklı bir üst sınır uygulanır. Sonuç olarak algoritmaya sağlamlık kazadırılsa da algoritmanın tasarımı gözlemlenen ve gözlemlenecek tüm sinyal değerleriyle alakalı bilgi gerektirmektedir.

Bu bildiride bizim amacımız dürtün gürültüye karşı küme üyeliği algoritmasının sağlamlığını artırmak ve bunu yaparken herhangi bir ek tasarım yükü getirmemektir. Öncelikle küme üyeliği en küçük mutlak fark algoritmasını (SM-NLAD) öneriyoruz. Bu algoritma ünlü işaret algoritması (SA) gibi mutlak hatayı maliyetlendirmektedir. SM-NLAD, SA'den daha iyi performans sergilemektedir ancak SA gibi SM-NLAD algoritmasının performansı da dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda diğer algoritmaların performansından kötü olmaktadır. Bunun

978-1-4673-5563-6/13/$31.00

üstesinden gelebilmek için de küme üyeliği en küçük logaritmik mutlak fark algoritmasını (SM-NLLAD) öneriyoruz. Bu algoritma, logaritmik maliyet fonksiyonunu kullanarak büyük hata değerleri için hatanın mutlak değerini ve küçük hata değerleri için ise karesini maliyetlendirir. Böylece dürtün gürültü ortamlarında ve dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda üstün performans sergiler.

Bildirinin organizasyonu şu şekildedir. Bölüm 2'de küme üyeliği süzgeci tanıtıldıktan sonra Bölüm 3'te problem tanımı verilecektir. Bölüm 4'te SM-NLAD algoritması önerilecektir. Logaritmik hata maliyeti çerçevesini Bölüm 5'te anlatıldıktan sonra Bölüm 6'da SM-NLLAD algoritması önerilecektir. Bölüm 7'de algoritmalarımızın performansı çeşitli sayısal deneylerde gösterilecek ve Bölüm 8'de verilen sonuçlarla bildirimiz tamamlanacaktır.

II. KÜME ÜYELİĞİ SÜZGECİ

Sistem tanılama çerçevesi içerisinde istenilen sinyalin, d_t, doğrusal olarak gözlemlendiğini varsayalım. Bu doğrusal ilişki şu şekilde ifade edilebilir[1]:

$$d_t = \mathbf{x}_t^T \mathbf{w_o} + n_t.$$

Bu ifadede $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^M$ bağlanım sinyal vektörüne, $\mathbf{w_o}$ aranan parametre vektörüne ve n_t ise bağlanım sinyalinden bağımsız gürültü sinyaline karşılık gelmektedir. Uyarlanabilir süzgeç algoritmaları $\mathbf{w_o} \in \mathbb{R}^M$ parametre vektörünü sıralı bir şekilde bulmayı amaçlar. Bunun için gözlemlemiş olduğu istenilen sinyal d_t ve bağlanım sinyali $\mathbf{x}_t$'i kullanarak d_{t+1}'i tahmin etmeye çalışır. Süzgecimizin t anındaki tahminini $\hat{d}_t$ olarak tanımlarsak, tahminimizdeki hata oranı şu şekildedir:

$$e_t \triangleq d_t - \hat{d}_t.$$

Normalde uyarlanabilir süzgeç algoritmaları tahminlerini hatanın belirli bir kuvvetinin ortalama değerini küçültecek şekilde seçer. Kolayca uygulanabildiği ve matematiksel olarak takibi yapılabildiği için en küçük ortalama kare algoritmaları bunların içinde en popüler olanıdır.

En küçük ortalama kare algoritmalarından farklı olarak küme üyeliği algoritmaları ortalama hata kuvvetini küçültmek yerine tüm hata değerlerinin büyüklüğünü yukardan sınırlandıran bir parametre vektörü bulmayı amaçlar [3]. Bir diğer ifadeyle, takip eden ifadedeki olurluk setini tanımlar:

$$\Omega \triangleq \bigcap_{(\mathbf{x},d)\in\mathcal{S}} \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^M : |d - \mathbf{w}^T\mathbf{x}|^2 \leq \gamma^2\}$$

ve bu set içerisinde yer alan tüm $\mathbf{w}$ parametreleri çözüm olarak kabul edilir. Bu ifadede yer alan $\mathcal{S}$, tüm olası d_t ve $\mathbf{x}_t$ çiftlerini içeren model uzayını sembolize etmektedir. Olurluk setini hesaplayan herhangi bir kapalı formül bulunmamaktadır. Bu yüzden [3]'te yazarlar olurluk setinin bir üst seti olan kısıt kümesi $\mathcal{H}_t$:

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^M : |d_t - \mathbf{w}^T\mathbf{x}_t| \leq \gamma\}.$$

ile Ω'yı yaklaşıklayıp, parametre vektörünün kısıt kümesi üzerindeki iz düşümünü alıp SM-NLMS uyarlanır süzgeç algoritmasını,

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t + \mu_t \frac{\mathbf{x}_t e_t}{\mathbf{x}_t^T \mathbf{x}_t} \quad (1)$$

ve

$$\mu_t = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma}{|e_t|} & |e_t| > \gamma \\ 0 & \text{aksi takdirde,} \end{cases}$$

elde ediyorlar. Şunu not etmek gerekir ki, önceki hata üst sınırdan küçük ise (1) parametre vektörünü güncellememekte ve bu özellik, algoritmanın hesaplama karmaşıklığını ciddi anlamda azaltmaktadır. Ayrıca SM-NLMS algoritması, sıradan NLMS algoritmasından daha iyi performans göstermektedir [2], [3].

Bir sonraki kısımda, küme üyeliği algoritmalarının sınırlı olmayan gürültü ortamlarındaki performans düşüklüğünden bahsetmekteyiz.

III. PROBLEM TANIMI

Olurluk setinde üst sınır γ dikkatli bir şekilde seçilmelidir aksi takdirde olurluk seti Ω, bir boş küme olur ve algoritmamız bir değere yakınsamaz. Gürültünün γ_n ile sınırlı olduğu bilgisi dahilinde, $\gamma \geq \gamma_n$ seçilirse olurluk seti Ω boş olmayacaktır [3].

Genellikle gürültü sınırlı değildir. Merkezi Limit Teoremi, birbirinden bağımsız çok sayıda küçük gürültünün bir araya gelmesi ile oluşan gürültünün Gauss dağılımına sahip olduğunu gösterir [5]. Ancak Gauss dağılımı sınırlı değildir. Ayrıca Gauss dağılımı, dürtün gürültü gibi çoğu gürültüyü modellemekte yetersiz kalmaktadır. Dürtün gürültü, belirli zamanlarda anlık olarak oluşan çok şiddetli gürültü sinyalleridir. Dürtün gürültü ortamlarında en küçük ortalama kare algoritmaları gibi küme üyeliği algoritması da kötü performans göstermektedir.

En küçük ortalama kare algoritmalarının dürtün gürültüye karşı sağlamlığını artırabilmek için işaret algoritmaları kullanılır. Hatanın mutlak değerini küçültmeyi amaçlayan bu algoritmaların performansı çok iyi olmasa da dürtün gürültüye karşı dayanıklıdır. Bu bildiride bizim amacımız küme üyeliği algoritmasının dayanıklılığını artırmak ancak bunu yaparken dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda mevcut küme üyeliği algoritması ile karşılaştırılabilir bir performans sergilemektir.

Bir sonraki kısımda dürtün gürültüye karşı sağlamlık sağlamak için SM-NLAD algoritmasını öneriyoruz.

IV. KÜME ÜYELİĞİ EN KÜÇÜK MUTLAK FARK (SM-NLAD) ALGORİTMASI

Aslında [3], olurluk setini kısıt kümesi ile yaklaşıklayarak, stokastik maliyet fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlıyor:

$$F(e_t) = \begin{cases} \left(\frac{|e_t| - \gamma}{\|\mathbf{x}_t\|}\right)^2 & |e_t| > \gamma \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

ve (1)'deki gradyan iniş algoritması bu maliyet fonksiyonuna karşılık geliyor.

Benzer bir şekilde dürtün gürültüye karşı dayanıklılık sağlamak için hatanın karesini almak yerine mutlak değerini

[1] Simgelem: Vektörler küçük koyu harflerle gösterilir. Zaman değişkeni altindiste yer alır. $\mathbf{a}$ vektörü için $\mathbf{a}^T$ sıradan çaprazlama işlemine ve $\|\mathbf{a}\|$ L2-düzgesine karşılık gelir. $\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$ ise bir gradyan işlecidir.

maliyetlendirirsek aşağıdaki fonksiyonu elde ederiz:

$$F(e_t) = \begin{cases} \frac{|e_t|-\gamma}{\|\mathbf{x}_t\|} & |e_t| > \gamma \\ 0 & \text{aksi takdirde} \end{cases} \tag{2}$$

ve bu maliyet fonksiyonuna karşılık gelen gradyan iniş algoritması, bir diğer ifadeyle SM-NLAD algoritması, şudur:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t + \mu_t \frac{\mathbf{x}_t \text{sign}(e_t)}{\|\mathbf{x}_t\|}$$

ve

$$\mu_t = \begin{cases} 1 & |e_t| > \gamma \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Performans değerlendirmesi kısmında küme üyeliği mutlak fark algoritmasının dürtün gürültüye karşı sağlamlığını sayısal deneylerde göstereceğiz. Ancak bu algoritma dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda kötü performans gösterecektir. Dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda da iyi performans sergileyen sağlam bir algoritma bulabilmek için bir sonraki kısımda logaritmik maliyet fonksiyonunu tanıtıyoruz.

V. LOGARİTMİK MALİYET FONKSİYONU

Uyarlanabilir süzgeç algoritmaları hata değerinin bir fonksiyonu olan maliyet fonksiyonunu küçültmeyi amaçlar. Literatürde performansı artırmak için hatanın daha yüksek kuvvetlerini veya sağlamlığını artırmak için hatanın mutlak değerini maliyetlendiren algoritmalar bulunmaktadır [1]. Logaritmik maliyet fonksiyonu büyük hata değerleri için hatanın küçük kuvvetlerini ve küçük hata değerleri için hatanın büyük kuvvetlerini içeren sürekli bir fonksiyondur [6]. Bu sayede algoritmaya kararlılık sağlar.

Logaritmik maliyet fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$J(e_t) \triangleq F(e_t) - \log(1 + F(e_t)). \tag{3}$$

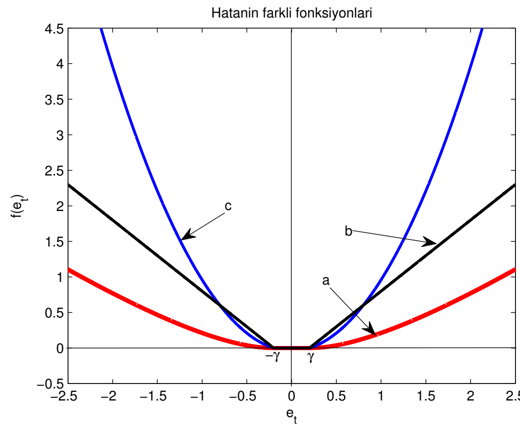
Burada $F(e_t)$ herhangi bir maliyet fonksiyonudur. Küçük hata değerleri için $J(e_t)$, $F(e_t)$ fonksiyonuna yakınsarken, büyük hata değerlerinde $F(e_t)^2$'ni yakınsamaktadır [6]. $F(e_t)$, $\mathbf{w}_t$'nin dışbükey fonksiyonu ise logaritmik maliyet fonksiyonu (3) de $\mathbf{w}_t$'nin dışbükey fonksiyonu olacaktır [6]. Bu sayede gradyan iniş algoritmasını kullanabiliriz ve karşılık gelen algoritma şu şekildedir:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \mu \nabla_{\mathbf{w}} F(e_t) \frac{F(e_t)}{1 + F(e_t)}.$$

Burada $\mu > 0$ algoritmanın adım büyüklüğünü vermektedir. Bir sonraki kısımda logaritmik maliyet fonksiyonunu küme üyeliği çerçevesi içerisinde kullanacağız.

VI. KÜME ÜYELİĞİ EN KÜÇÜK LOGARİTMİK MUTLAK FARK (SM-NLLAD) ALGORİTMASI

Şekil 1'de hatanın farklı fonksiyonlarını karşılaştırıyoruz. Bu fonksiyonları bağlanım sinyalinin normu ile düzgelersek b) ve c) sırasıyla SM-NLAD ve SM-NLMS algoritmalarının stokastik maliyet fonksiyonlarına karşılık gelir. a) ise logaritmik maliyet fonksiyonu (3)'de, $F(e_t)$, (2)'deki gibi seçilirse elde edeceğimiz maliyet fonksiyonunun düzgelenmemiş halini gösterir. Bu şekil gösteriyorki a) fonksiyonu küçük hata değerleri için b) kadar dik değilken, büyük hata değerlerinde b)'ye paralel uzanmaktadır. Bu da algoritmanın sağlam olmasını ve de aynı zamanda üstün performans göstermesini sağlıyor.



Şekil 1: Farklı hata fonksiyonlarının karşılaştırılması: a) $(|e_t| - \gamma - \log(1 + |e_t| - \gamma))\mathbb{1}_A(e_t)$, b) $(|e_t| - \gamma)\mathbb{1}_A(e_t)$, c) $(e_t^2 - \gamma^2)\mathbb{1}_A(e_t)$. Burada $\mathbb{1}_A(e_t)$, bir gösterge fonksiyonu ve $A = \{e_t \in \mathbb{R} \mid |e_t| > \gamma\}$.

Eğer (2)'deki maliyet fonksiyonunu logaritmik maliyet çerçeve içerisinde kullanırsak karşılık gelen gradyan iniş algoritması mutlak hatanın üst sınır γ'dan büyük olduğu durumlarda şu olur:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t + \frac{\mathbf{x}_t \text{sign}(e_t)}{\|\mathbf{x}_t\|} \frac{\left|\frac{|e_t|-\gamma}{\|\mathbf{x}_t\|}\right|}{1 + \left|\frac{|e_t|-\gamma}{\|\mathbf{x}_t\|}\right|}. \tag{4}$$

İfadeyi (4) düzenlersek, aşağıdaki sağlam SM-NLLAD algoritmasını elde ederiz:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t + \frac{\mu_t \mathbf{x}_t e_t}{\|\mathbf{x}_t\| \left(\|\mathbf{x}_t\| + \left||e_t| - \gamma\right|\right)} \tag{5}$$

ve

$$\mu_t = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma}{|e_t|} & |e_t| > \gamma \\ 0 & \text{aksi takdirde.} \end{cases}$$

Bu algoritma (5) dürtün gürültü sonucu oluşacak büyük hata değerleri için küme üyeliği mutlak fark algoritması gibi davranırken, küçük hata değerlerinde küme üyeliği düzgelenmiş en küçük ortalama kare algoritması gibi davranır (Şekil 1'e bak). Tekrar vurgularsak, bu sayede SM-NLLAD algoritması dürtün gürültüye karşı sağlam dururken performansta bir kayıp yaşamıyor.

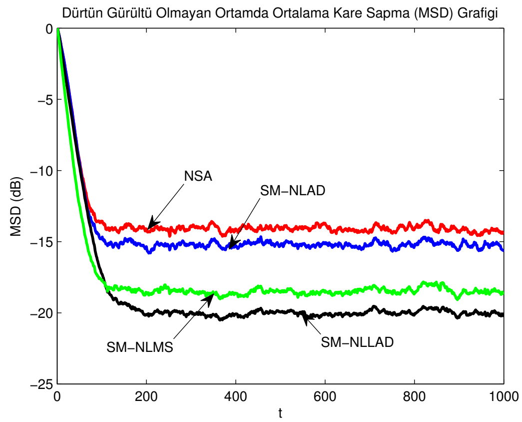
Bir sonraki kısımda algoritmalarımızın performansını sayısal deneylerle değerlendireceğiz.

VII. PERFORMANS DEĞERLENDİRMESİ

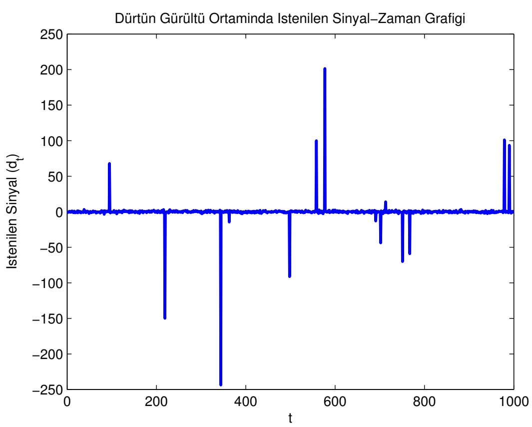
Burada istenilen sinyalin doğrusal olarak, şu şekilde oluşturulduğunu varsayıyoruz:

$$d_t = \mathbf{w_o}^T \mathbf{x}_t + n_t$$

ve bağlanım sinyali $\mathbf{x}_t$ sıfır ortalamalı, varyansı $\sigma_x^2 = 1$ olan, Gauss dağılımına sahip rasgele bir vektör sürecini gösteriyor. Gürültü sinyali n_t de sıfır ortalamalı Gauss dağılımına sahip rasgele bir süreç ve gerçek parametre $\mathbf{w_o} \in \mathbb{R}^5$ rasgele seçiliyor. Aşağıdaki örneklerde algoritmalarımızın performansını birbirinden bağımsız şekilde gerçekleştirmiş olduğumuz 200 deneyin ortalamasını alarak karşılaştırıyoruz.



Şekil 2: Dürtün gürültü bulunmayan ortamda NSA, SM-NLAD, SM-NLLAD ve SM-NLMS algoritmalarının performanslarının karşılaştırılması.



Şekil 3: Dürtün gürültü ortamında istenilen sinyal d_t örneği.

1. Örnek (Dürtün Gürültü Bulunmayan Ortam):

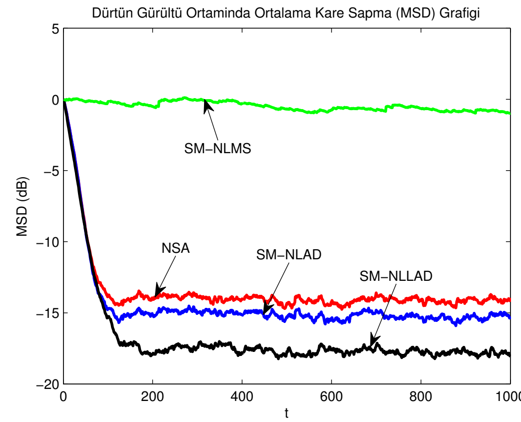
İlk örnekte gürültü sinyalinin varyansı $\sigma_n^2 = 0,1$ olarak seçildi. Düzgelenmiş işaret algoritması (NSA), SM-NLAD, SM-NLLAD ve SM-NLMS algoritmalarının adım büyüklükleri sırasıyla 0,1, 0,1, 0,2 ve 0,2 olarak seçildi. Küme üyeliği algoritmaları için üst sınır $\gamma = 0,1$. Şekil 2'de görüldüğü üzere SM-NLAD algoritması SA'den iyi performans göstermekte ve logaritmik maliyet fonksiyonunu kullanan SM-NLLAD algoritması SM-NLMS ile benzer bir performans sergilemektedir.

2. Örnek (Dürtün Gürültü Ortamı):

İkinci örnekte dürtün gürültüyü şu şekilde modelliyoruz [6]:

$$n_t = n_{o,t} + b_t n_{i,t}$$

ve $n_{o,t}$ sıradan gürültüye ($\sigma_{n_o}^2 = 0.1$) ve $n_{i,t}$ büyük varyansa sahip ($\sigma_{n_i}^2 = 10^4$) gürültüye karşılık geliyor. Burada b_t bir Bernolli rasgele değişkeni gösterir şöyleki $p_B(b_t = 1) = 0,01$ ve $p_B(b_t = 0) = 0,99$. Şekil 3'de yukarıdaki yöntemle oluşturulmuş gürültü ortamında gözlemlenen istenilen sinyali d_t görebiliriz. Şekil 4'te algoritmaların performansını dürtün gürültü ortamında karşılaştırıyoruz. Adım büyüklükleri ve



Şekil 4: Dürtün gürültü ortamında NSA, SM-NLAD, SM-NLLAD ve SM-NLMS algoritmalarının performanslarının karşılaştırılması.

üst sınır γ, 1. örnekteki gibi seçildi. Şekil 4 gösteriyorki dürtün gürültünün olmadığı ortamda SM-NLMS ile benzer performans sergileyen SM-NLLAD algoritması dürtün gürültü ortamında, SM-NLMS algoritması artık çalışmazken, hala NSA ve SM-NLAD algoritmalarından daha iyi performans göstermektedir.

VIII. SONUÇLAR

Bu bildiride iki, yeni, sağlam küme üyeliği algoritması sunuyoruz. İlk algoritmamız SM-NLAD, ünlü işaret algoritmasının hesaplama karmaşıklığını azaltırken aynı zamanda performansını da artırmak. Sonrasında SM-NLAD algoritmasının performansını daha da artırmak için logaritmik maliyet fonksiyonundan faydalanıyoruz. Logaritmik maliyet çerçevesi içerisinde oluşturmuş olduğumuz SM-NLLAD algoritması, dürtün gürültünün olmadığı ortamlarda SM-NLMS algoritmasının performansına benzer bir performans sergiler. Ayrıca SM-NLLAD algoritması dürtün gürültüye karşı sağlamdır.

KAYNAKÇA

[1] A. H. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering*, John Wiley and Sons, 2003.

[2] P. R. S. Diniz, *Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation*, Kluwer Academic Publishers, 2008.

[3] S. Gollamudi, S. Nagaraj, S. Kapoor, and Y. F. Huang, "Set-membership filtering and a set-membership normalized LMS algorithm with an adaptive step size", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, no. 5, May 1998.

[4] M. Z. A. Bhotto and A. Antoniou, "A robust set-membership normalized least mean square adaptive filter", *in Proc. IEEE Can. Conf. Elec. Comp. Eng.*, May 2010.

[5] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Mc. Graw Hill, 2002.

[6] M. O. Sayin, N. D. Vanli, and S. S. Kozat, "A novel family of adaptive filtering algorithms based on the logarithmic cost", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Submitted in 2013.